TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Multivariate anisotrope Interpolation auf dem Torus

Ronny Bergmann*

AG Bildverarbeitung
TU Kaiserslautern

17. März 2014

Mecklenburger Workshop
Approximationsmethoden und schnelle Algorithmen

Hasenwinkel

FELIX KLEIN
ZENTRUM FÜR
MATHEMATIK

*in Zusammenarbeit mit Jürgen Prestin

Einleitung

Kardinale Interpolation durch Funktion φ mit äquidistanten Punkten auf

- $\mathbb{R}$ [Schönberg (1969)]
  Strang-Fix-Bedingungen (1973): Reproduktionsgüte von Polynomen
- $\mathbb{T}$ [Locher (1981), Delvos (1987)]
- $\mathbb{R}^d$ durch Tensorproduktbildung [Schönberg (1987)]

Für Tensorprodukt-Gitter auf $\mathbb{T}^d$

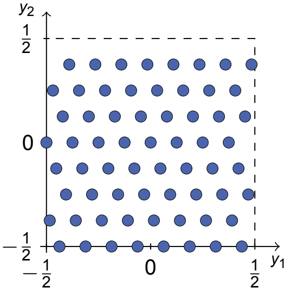
- $\alpha \geq 0$: Glattheit der abgetasteten Funktion f
- Strang-Fix-Bedingungen für trig. Polynome, $\alpha = 0$ [Pöplau (1995)]
- verallgemeinert auf $\alpha \geq 0$ [Sprengel (1998)]

Inhalt dieses Vortrags

1. periodische Interpolation auf beliebigen Gittern
2. Richtungsglattheit einer periodischen Funktion f
3. Interpolationsfehler $\|f - \mathrm{L}_{\mathbf{M}} f\|$

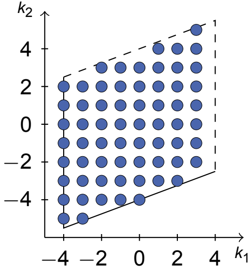
Muster und erzeugende Menge

Sei $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{d\times d}$ eine reguläre Matrix.



Muster

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$



erzeugende Menge

$$\mathcal{P}(\mathbf{M}) := \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)^d \cap \mathbf{M}^{-1}\mathbb{Z}^d$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{M}^{\mathrm{T}}) := \mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathcal{P}(\mathbf{M}^{\mathrm{T}}) = \mathbf{M}^{\mathrm{T}}\left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)^d \cap \mathbb{Z}^d$$

Es gilt

- $m := |\mathcal{P}(\mathbf{M})| = |\mathcal{G}(\mathbf{M})| = |\det \mathbf{M}|$
- $\big(\mathcal{P}(\mathbf{M}), + \bmod 1\big)$ ist eine Gruppe

Fourier-Transformation

- Fourier-Matrix auf $\mathcal{P}(\mathbf{M})$ (feste Anordnung):

$$\mathcal{F}(\mathbf{M}) := \frac{1}{\sqrt{m}} \left(\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\mathbf{h}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}}\right)_{\mathbf{h}\in\mathcal{G}(\mathbf{M}^{\mathrm{T}}),\mathbf{y}\in\mathcal{P}(\mathbf{M})} \in \mathbb{C}^{m\times m}$$

- Fourier-Transformation für (Abtast-)Werte $\mathbf{a} = (a_{\mathbf{y}})_{\mathbf{y}\in\mathcal{P}(\mathbf{M})} \in \mathbb{C}^m$:

$$\hat{\mathbf{a}} = (\hat{a}_{\mathbf{h}})_{\mathbf{h}\in\mathcal{G}(\mathbf{M}^{\mathrm{T}})} := \sqrt{m}\mathcal{F}(\mathbf{M})\mathbf{a} \in \mathbb{C}^m$$

- Fourier-Koeffizienten einer Funktion $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$:

$$c_{\mathbf{k}}(f) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$$

- Die Fourier-Partialsumme von $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$

$$\mathrm{S}_{\mathbf{M}} f := \sum_{\mathbf{h}\in\mathcal{G}(\mathbf{M}^{\mathrm{T}})} c_{\mathbf{h}}(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{h}^{\mathrm{T}}\circ}$$

  ist ein trigonometrisches Polynome aus der Menge

$$\mathcal{T}_{\mathbf{M}} := \left\{f;\, f = \sum_{\mathbf{h}\in\mathcal{G}(\mathbf{M}^{\mathrm{T}})} \hat{a}_{\mathbf{h}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{h}^{\mathrm{T}}\circ}, \quad \hat{a}_{\mathbf{h}} \in \mathbb{C}\right\}.$$

Translationsinvarianter Raum

Der translationsinvariante Raum einer Funktion $\varphi \in L_1(\mathbb{T}^d)$ bzgl. $\mathcal{P}(\mathbf{M})$:

$$V_{\mathbf{M}}^{\varphi} := \left\{ f;\, f = \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{P}(\mathbf{M})} a_{f,\mathbf{y}}\varphi(\circ - 2\pi\mathbf{y}), \quad \mathbf{a}_f = (a_{f,\mathbf{y}})_{\mathbf{y}\in\mathcal{P}(\mathbf{M})} \in \mathbb{C}^m \right\}$$

In Fourier-Koeffizienten:

$f \in V_{\mathbf{M}}^{\varphi}$ genau dann, wenn für alle $\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^{\mathrm{T}})$, $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$ gilt

$$c_{\mathbf{h}+\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}}(f) = \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{P}(\mathbf{M})} a_{f,\mathbf{y}} \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\mathbf{h}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}} c_{\mathbf{h}+\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}}(\varphi) = \hat{a}_{f,\mathbf{h}} c_{\mathbf{h}+\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}}(\varphi),$$

wobei $\hat{\mathbf{a}}_f = \sqrt{m}\mathcal{F}(\mathbf{M})\mathbf{a}_f$.

Funktionenräume anisotroper Glattheit

- elliptisches Gewicht $\sigma_\alpha^{\mathbf{M}}(\mathbf{k}) := \left(1 + \|\mathbf{M}\|_2^2 \|\mathbf{M}^{-\mathrm{T}}\mathbf{k}\|_2^2\right)^{\alpha/2}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$
- Für ein $q \geq 1$: Raum anisotroper Glattheit

$$A^\alpha_{\mathbf{M},q}(\mathbb{T}^d) := \left\{ f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{T}^d)\,;\, \left\|f \,\middle|\, A^\alpha_{\mathbf{M},q}\right\| < \infty \right\},$$

mit Norm $\left\|f \,\middle|\, A^\alpha_{\mathbf{M},q}\right\| := \left\|\{\sigma_\alpha^{\mathbf{M}}(\mathbf{k}) c_{\mathbf{k}}(f)\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \,\middle|\, \ell_q(\mathbb{Z}^d)\right\|$ definiert.

- $A^0_{\mathbf{M},1}(\mathbb{T}^d)$ ist die Wiener Algebra $A(\mathbb{T}^d)$
- $A^\alpha_{\mathbf{M},q} = A^\alpha_{\mathbf{E}_d,q}$, denn obige Norm ist äquivalent zu

$$\left\|f \,\middle|\, A^\alpha_{\mathbf{E}_d,q}\right\| := \left\|\{(1 + \|\mathbf{k}\|_2^2)^{\alpha/2} c_{\mathbf{k}}(f)\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \,\middle|\, \ell_q(\mathbb{Z}^d)\right\|$$

aber: Die Normen ermöglichen
unterschiedliche „Bewertung“ der Glattheit von f.

Interpolation

- Gegeben: Abtastwerte $f(2\pi\mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})$ einer Funktion f
- Gesucht: Interpolante $\mathrm{L}_{\mathbf{M}}f \in V_{\mathbf{M}}^{\varphi}$, d.h. mit $\mathrm{L}_{\mathbf{M}}f(2\pi\mathbf{y}) = f(2\pi\mathbf{y})$
- Lösung mit Fundamentalinterpolant $\mathrm{I}_{\mathbf{M}} \in V_{\mathbf{M}}^{\varphi}$:

$$\mathrm{L}_{\mathbf{M}}f = \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{P}(\mathbf{M})} f(2\pi\mathbf{y})\,\mathrm{I}_{\mathbf{M}}(\circ - 2\pi\mathbf{y})$$

Lemma

Für $\varphi \in A(\mathbb{T}^d)$ *und* $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{d\times d}$ *regulär existiert ein* $\mathrm{I}_{\mathbf{M}} \in V_{\mathbf{M}}^{\varphi}$ *gdw.*

$$\sum_{\mathbf{z}\in\mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{h}+\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}}(\varphi) \neq 0, \qquad \textit{für alle } \mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^{\mathrm{T}}).$$

Beweis mittels

- Fourier-Koeffizienten $c_{\mathbf{k}}(\mathrm{I}_{\mathbf{M}})$
- Diskrete Fourier-Koeffizienten & Aliasing-Formel

$$c_{\mathbf{k}}^{\mathbf{M}}(\varphi) := \frac{1}{m}\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{P}(\mathbf{M})} \varphi(2\pi\mathbf{y})\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}} = \sum_{\mathbf{z}\in\mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{k}+\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}}(\varphi), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$$

Strang-Fix-Bedingungen

Charakterisierung der Approximationsgüte von trigonometrischen Polynomen

Definition (SFC)

Für $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{d\times d}$, $\lambda_1(\mathbf{M}) > 1$, eine Ordnung $s > 0$, $q \geq 1$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}^+$, erfüllt der $\mathrm{I}_{\mathbf{M}} \in \mathrm{L}_1(\mathbb{T}^d)$ die *elliptischen Strang-Fix-Bedingungen*, falls eine nichtnegative Folge $\mathbf{b} = \{b_{\mathbf{z}}\}_{\mathbf{z}\in\mathbb{Z}^d}$ existiert, so dass

1. $|1 - mc_{\mathbf{h}}(\mathrm{I}_{\mathbf{M}})| \leq b_{\mathbf{0}} \kappa_{\mathbf{M}}^{-s} \|\mathbf{M}^{-\mathrm{T}}\mathbf{h}\|_2^s$,
2. $|mc_{\mathbf{h}+\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}}(\mathrm{I}_{\mathbf{M}})| \leq b_{\mathbf{z}} \kappa_{\mathbf{M}}^{-s} \|\mathbf{M}\|_2^{-\alpha} \|\mathbf{M}^{-\mathrm{T}}\mathbf{h}\|_2^s$

für $\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^{\mathrm{T}})$, $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d \backslash \{\mathbf{0}\}$ gilt, wobei

$$\gamma_{\mathrm{SF}} := \|\{\sigma_\alpha^{\mathbf{M}}(\mathbf{z}) b_{\mathbf{z}}\}_{\mathbf{z}\in\mathbb{Z}^d} | \ell_q(\mathbb{Z}^d)\| < \infty.$$

- Konditionszahl $\kappa_{\mathbf{M}} := \|\mathbf{M}\|_2 \|\mathbf{M}^{-1}\|_2$
- „Maß“ f. Approximationsgüte von $g \in \mathcal{T}_{\mathbf{M}}$

Interpolationsfehler

Einführung & Dreiecksungleichung

- f sei in gewisse Richtungen Glatt, d.h. $f \in A^{\alpha}_{\mathbf{M},q}$
- Fundamentalinterpolant $\mathrm{I}_{\mathbf{M}} \in V^{\varphi}_{\mathbf{M}}$ erfülle die SFC der Ordnung $s \geq 0$ zu gleichem $q, \alpha, \mathbf{M}$
- Gesucht: Abschätzung für den Fehler der Interpolation $\|f - \mathrm{L}_{\mathbf{M}} f\|$ in einer „passenden“ Norm

Idee: Ist f entlang einer Richtung hinreichend glatt (bzw. „rau“), so werden für diese Richtung entsprechend weniger (bzw. mehr) Translate benötigt.

Analogon zu der Menge $\mathcal{P}(\mathbf{M})$: Menge trig. Polynome $\mathcal{T}_{\mathbf{M}}$.

Zur Untersuchung des Fehlers $\|f - \mathrm{L}_{\mathbf{M}} f\|$: Dreiecksungleichung

$$\|f - \mathrm{L}_{\mathbf{M}} f\| \leq \|\mathrm{S}_{\mathbf{M}} f - \mathrm{L}_{\mathbf{M}} \mathrm{S}_{\mathbf{M}} f\| + \|f - \mathrm{S}_{\mathbf{M}} f\| + \|\mathrm{L}_{\mathbf{M}}(f - \mathrm{S}_{\mathbf{M}} f)\|$$

Interpolationsfehler

Teil I: Trigonometrische Polynome

Theorem (B., Prestin, 2014)

Sei $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{d\times d}$, $\lambda_1(\mathbf{M}) > 1$, $g \in \mathcal{T}_{\mathbf{M}}$. *Der* $\mathrm{I}_{\mathbf{M}} \in A(\mathbb{T}^d)$ *zu* φ *erfülle die SFC für* $s \geq 0$, $\alpha > 0$ *und* $q \geq 1$. *Dann gilt*

$$\left\| g - \mathrm{L}_{\mathbf{M}} g \,\middle|\, A^{\alpha}_{\mathbf{M},q} \right\| \leq \left(\frac{1}{\|\mathbf{M}\|_2} \right)^{s} \gamma_{\mathrm{SF}} \left\| g \,\middle|\, A^{\alpha+s}_{\mathbf{M},q} \right\|.$$

- Beweis über $c_{\mathbf{k}}(g - \mathrm{L}_{\mathbf{M}} g)$ und Anwenden der SFC
- Anwendung mit $g = \mathrm{S}_{\mathbf{M}} f$ und nutzen $\left\| \mathrm{S}_{\mathbf{M}} f \,\middle|\, A^{\alpha+s}_{\mathbf{M},q} \right\| \leq \left\| f \,\middle|\, A^{\alpha+s}_{\mathbf{M},q} \right\|$.
- $\|\mathbf{M}\|_2$ ist die Länge der Hauptachse der Ellipse $\|\mathbf{M}^{-\mathrm{T}}\mathbf{x}\|_2 = 1$
- ist f entlang dieser Richtung glatt, so ist Norm auf linker Seite klein

Interpolationsfehler

Teil II: Fehler der Fourier-Summen-Approximation

Theorem (B., Prestin, 2014)

Sei $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{d\times d}$ *regulär,* $f \in A^{\mu}_{\mathbf{M},q}(\mathbb{T}^d)$, $q \geq 1$ *und* $\mu \geq \alpha \geq 0$. *Dann gilt*

$$\left\| f - \mathrm{S}_{\mathbf{M}} f \,\middle|\, A^{\alpha}_{\mathbf{M},q} \right\| \leq \left(\frac{2}{\|\mathbf{M}\|_2} \right)^{\mu-\alpha} \left\| f \,\middle|\, A^{\mu}_{\mathbf{M},q} \right\|.$$

Beweisidee: Schreiben $\sigma^{\mathbf{M}}_{\alpha}(\mathbf{k}) = \sigma^{\mathbf{M}}_{\alpha-\mu}(\mathbf{k})\sigma^{\mathbf{M}}_{\mu}(\mathbf{k})$
und schätzen den ersten Term für alle $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d \setminus \mathcal{G}(\mathbf{M}^{\mathrm{T}})$ ab.

Interpretation der Ellipse vom letzten Theorem gilt auch hier ($\mu \geq \alpha$) für den Fourier-Reihenrest $f - \mathrm{S}_{\mathbf{M}} f$.

Interpolationsfehler

Teil III: Interpolant des Fourier-Summenfehlers

Theorem (B., Prestin, 2014)

Sei $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{d\times d}$ *regulär,* $f \in A^{\mu}_{\mathbf{M},q}(\mathbb{T}^d)$*,* $q \geq 1$*,* $\mu \geq \alpha \geq 0$*, und* $\mu > d(1 - 1/q)$*. Dann gilt*

$$\left\| \mathrm{L}_{\mathbf{M}}(f - \mathrm{S}_{\mathbf{M}} f) \,\middle|\, A^{\alpha}_{\mathbf{M},q} \right\| \leq \gamma_{\mathrm{IP}} \gamma_{\mathrm{Sm}} \left(\frac{1}{\|\mathbf{M}\|_2} \right)^{\mu-\alpha} \left\| f \,\middle|\, A^{\mu}_{\mathbf{M},q} \right\|,$$

wobei

- γ_{IP} *nur von* $\mathrm{I}_{\mathbf{M}}$*, also von* φ
- γ_{Sm} *lediglich von* q, α *und* μ

abhängt.

Interpolationsfehler

Gesamtabschätzung

Theorem (B., Prestin, 2014)

Sei $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{d\times d}$, $\lambda_1(\mathbf{M}) > 1$ *und* $f \in A^{\mu}_{\mathbf{M},q}(\mathbb{T}^d)$, $\mu \geq \alpha \geq 0$ *mit* $\mu > d(1-1/q)$. *Der* $\mathrm{I}_{\mathbf{M}}$ *zu* φ *erfülle die SFC der Ordnung* $s > 0$ *für* $q \geq 1$, $\alpha \geq 0$. *Dann gilt*

$$\left\| f - \mathrm{L}_{\mathbf{M}} f \,\middle|\, A^{\alpha}_{\mathbf{M},q} \right\| \leq C_\rho \left(\frac{1}{\|\mathbf{M}\|_2} \right)^{\rho} \left\| f \,\middle|\, A^{\mu}_{\mathbf{M},q} \right\|, \quad \textit{wobei } \rho := \min\{s, \mu-\alpha\},$$

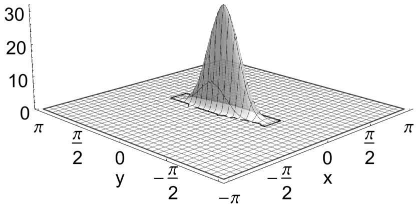
$$C_\rho := \begin{cases} \gamma_{\mathrm{SF}} + 2^{\mu-\alpha} + \gamma_{\mathrm{IP}}\gamma_{\mathrm{Sm}} & \textit{falls } \rho = s, \\ (1+d)^{s+\alpha-\mu}\gamma_{\mathrm{SF}} + 2^{\mu-\alpha} + \gamma_{\mathrm{IP}}\gamma_{\mathrm{Sm}} & \textit{falls } \rho = \mu-\alpha. \end{cases}$$

- Für $\rho = \mu - \alpha$ analoge Version der ersten Abschätzung notwendig
- $\mu - \alpha$ „Zusätzliche Glattheit“ von *f* gegenüber IP-Fehler
- SFC-Ordnung *s* von φ: Saturationsordnung

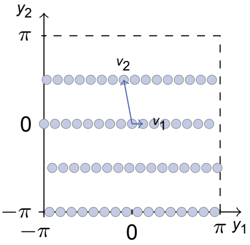
Periodisierter 3-Richtungs-Box-Spline

- 2-dimensionaler Box-Spline mit Richtungen
  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1, \mathbf{v_2} = \mathbf{e}_2, \mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$
- $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{N}$ Vielfachheiten der Richtungen im Box-Spline
- Stauchen um $\mathbf{M}^{-1}$ und 2π-Periodisierung ergeben $B_{\mathbf{p}}^{\mathbf{M}}$:

$$c_{\mathbf{k}}(B_{\mathbf{p}}^{\mathbf{M}}) = \frac{1}{m} \prod_{j=1}^{3} (\operatorname{sinc} \pi \mathbf{k}^{\mathrm{T}} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{v}_j)^{p_j}$$



$B_{\mathbf{p}}^{\mathbf{M}}$



Samplingpunkte $2\pi\mathbf{y}, \mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 16 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{p} = (2,2,2)^{\mathrm{T}}, \mathbf{M}^{-1}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{M}^{-1}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{64}\begin{pmatrix} -3 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Periodisierter 3-Richtungs-Box-Spline

- 2-dimensionaler Box-Spline mit Richtungen
  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1, \mathbf{v_2} = \mathbf{e}_2, \mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$
- $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{N}$ Vielfachheiten der Richtungen im Box-Spline
- Stauchen um $\mathbf{M}^{-1}$ und 2π-Periodisierung ergeben $B_{\mathbf{p}}^{\mathbf{M}}$:

$$c_{\mathbf{k}}(B_{\mathbf{p}}^{\mathbf{M}}) = \frac{1}{m} \prod_{j=1}^{3} (\operatorname{sinc} \pi \mathbf{k}^{\mathrm{T}} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{v}_j)^{p_j}$$

Theorem (B., Prestin, 2014)

Der zu $B_{\mathbf{p}}^{\mathbf{M}}$ gehörende Fundamentalinterpolant $I_{\mathbf{M}}$ existiert.

*Sei $q \geq 1$, $\tilde{s} := \min\{p_1 + p_2, p_1 + p_3, p_2 + p_3\}$
und $\alpha \geq 0$, so dass $s := \tilde{s} - \alpha > 2$.*

Dann erfüllt $I_{\mathbf{M}}$ die SFC der Ordnung s.

Zusammenfassung

Auf beliebigen Gittern $\mathcal{P}(\mathbf{M})$

- Korrektheit der Interpolation
- Strang-Fix-Bedingungen
- Richtungen
  - Hauptachse der Ellipsen $\|\mathbf{M}^{-\mathrm{T}}\mathbf{x}\| = c$ im Frequenzbereich
  - $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{v}_j$ im Zeitbereich
- Schranke für den Interpolationsfehler von $f \in A^{\alpha}_{\mathbf{M},q}$.

Ausblick

- anisotrope Räume dominierender gemischter Glattheit
- anisotrope dünne Gitter

Literatur

B., J. Prestin, *Multivariate anisotropic interpolation on the Torus*, Accepted. arxiv.org/pdf/1309.3432v2.pdf.

B., *Translationsinvariante Räume multivariater anisotroper Funktionen auf dem Torus*, Dissertation, Universität zu Lübeck, 2013.

[De87] F.J. Delvos, *Periodic interpolation on uniform meshes*, J. Approx. Theory 51 (1987) 71–80.

[LP10] D. Langemann, J. Prestin, *Multivariate periodic wavelet analysis*, ACHA 28 (2010) 46–66.

[Lo81] F. Locher, *Interpolation on uniform meshes by the translates of one function and related attenuation factors*, Math. Comput., 37 (1981), 403–416.

[Pö95] G. Pöplau, *Multivariate periodische Interpolation durch Translate und deren Anwendung*, Dissertation, Universität Rostock, 1995.

[Sp97] F. Sprengel, *Interpolation und Waveletzerlegung multivariater periodischer Funktionen*, Dissertation, Universität Rostock, 1997.

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit.