



Die multivariate anisotrope Wavelet-Transformation auf dem Torus

Ronny Bergmann

Institut für Mathematik
Universität zu Lübeck

Kolloquiumsvortrag
Kaiserslautern
8. April 2013

Einführung

Periodische Wavelets im Eindimensionalen

- translationsinvariante Räume mit Verschiebung $2\pi/N$
- Wavelets [PT95]
- schnelle Algorithmen und de la Vallée Poussin-Mittel [Se98]

Im Mehrdimensionalen

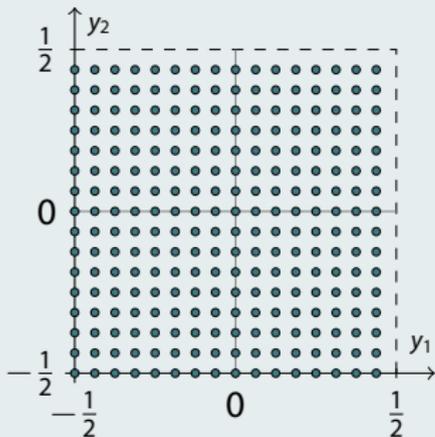
- Verschiebungen auf $\mathbb{T}^d = [-\pi, \pi)^d$
- aus dem Skalierungsfaktor J wird eine Skalierungsmatrix \mathbf{J} [MS03]
- bei festem Faktor (z. B. $|\det \mathbf{J}| = 2$) verschiedene Matrizen möglich [LP10]
- Richtungspräferenz
- Umgang mit „Curse of Dimension“

Muster

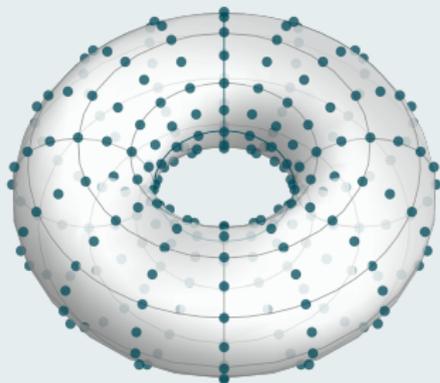
gleichverteilte Punkte auf dem Torus

Das Muster $\mathcal{P}(\mathbf{M})$ einer regulären Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$

$$\mathcal{P}(\mathbf{M}) := \mathbf{M}^{-1}\mathbb{Z}^d \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^d$$



$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}, \text{ 256 Punkte}$$

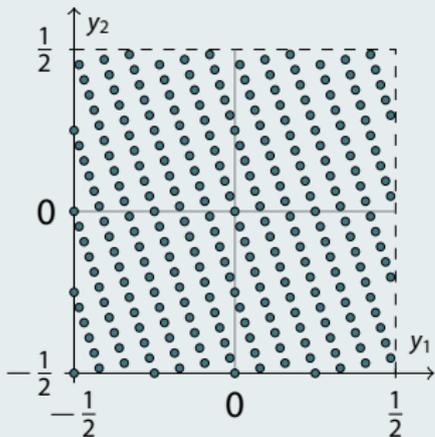


Muster

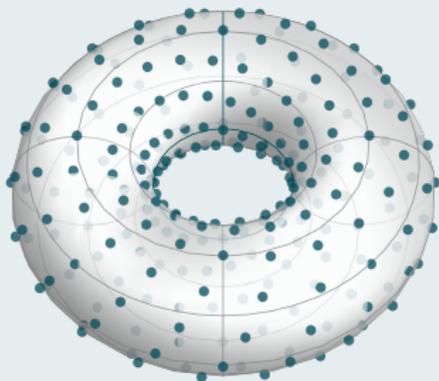
gleichverteilte Punkte auf dem Torus

Das Muster $\mathcal{P}(\mathbf{M})$ einer regulären Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$

$$\mathcal{P}(\mathbf{M}) := \mathbf{M}^{-1}\mathbb{Z}^d \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^d$$



$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 28 & -12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}, \text{ 256 Punkte}$$

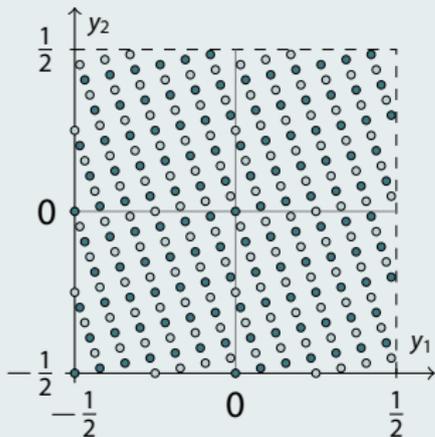


Muster

gleichverteilte Punkte auf dem Torus

Das Muster $\mathcal{P}(\mathbf{M})$ einer regulären Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$

$$\mathcal{P}(\mathbf{M}) := \mathbf{M}^{-1}\mathbb{Z}^d \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^d$$



$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 28 & -12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}, \text{ 256 Punkte}$$

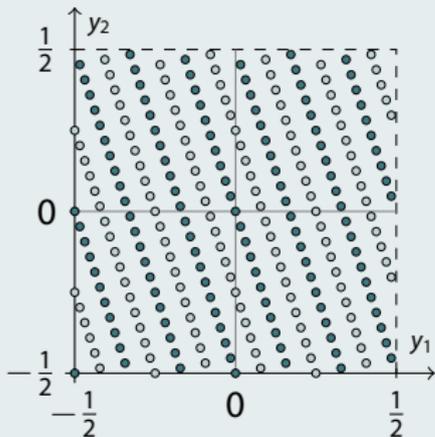
- $|\mathcal{P}(\mathbf{M})| = |\det \mathbf{M}| =: m$
- $(\mathcal{P}(\mathbf{M}), + \text{ mod } 1)$ ist eine Gruppe
- Teilmuster $\mathcal{P}(\mathbf{N})$
für $\mathbf{M} = \mathbf{JN}$, $\mathbf{J}, \mathbf{N} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$
- etwa im dyadischen Fall $|\det \mathbf{J}| = 2$:
- $\mathbf{J}_X := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Muster

gleichverteilte Punkte auf dem Torus

Das Muster $\mathcal{P}(\mathbf{M})$ einer regulären Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$

$$\mathcal{P}(\mathbf{M}) := \mathbf{M}^{-1}\mathbb{Z}^d \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^d$$



$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 28 & -12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}, \text{ 256 Punkte}$$

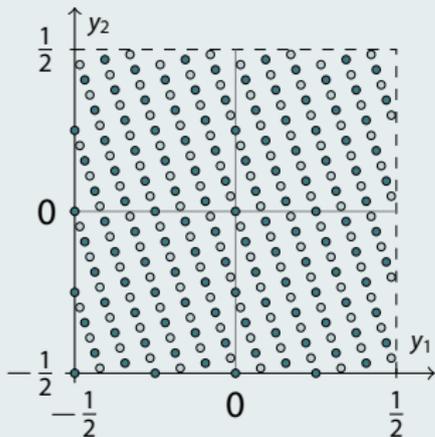
- $|\mathcal{P}(\mathbf{M})| = |\det \mathbf{M}| =: m$
- $(\mathcal{P}(\mathbf{M}), + \text{ mod } 1)$ ist eine Gruppe
- Teilmuster $\mathcal{P}(\mathbf{N})$
für $\mathbf{M} = \mathbf{JN}$, $\mathbf{J}, \mathbf{N} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$
- etwa im dyadischen Fall $|\det \mathbf{J}| = 2$:
- $\mathbf{J}_X := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{J}_Y := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Muster

gleichverteilte Punkte auf dem Torus

Das Muster $\mathcal{P}(\mathbf{M})$ einer regulären Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$

$$\mathcal{P}(\mathbf{M}) := \mathbf{M}^{-1}\mathbb{Z}^d \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^d$$



$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 28 & -12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$, 256 Punkte

- $|\mathcal{P}(\mathbf{M})| = |\det \mathbf{M}| =: m$
- $(\mathcal{P}(\mathbf{M}), + \text{mod } 1)$ ist eine Gruppe
- Teilmuster $\mathcal{P}(\mathbf{N})$
für $\mathbf{M} = \mathbf{JN}$, $\mathbf{J}, \mathbf{N} \in \mathbb{Z}^{d \times d}$
- etwa im dyadischen Fall $|\det \mathbf{J}| = 2$:
- $\mathbf{J}_X := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{J}_Y := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{J}_D := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Translationsinvarianz I

Mit $T_{\mathbf{y}}f := f(\circ - 2\pi\mathbf{y})$ heißt $V \subset L_2(\mathbb{T}^d)$ **M**-invariant, falls

$$\forall \mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}) : T_{\mathbf{y}}f \in V.$$

\Rightarrow Raum der Translate $V_{\mathbf{M}}^f := \text{span}\{T_{\mathbf{y}}f, \mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})\}$ ist **M**-invariant, denn

$g \in V_{\mathbf{M}}^f$ lässt sich schreiben als

$$g = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} a_{\mathbf{y}} T_{\mathbf{y}}f, \quad a_{\mathbf{y}} \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad T_{\mathbf{x}}g = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} a_{\mathbf{y}-\mathbf{x}} T_{\mathbf{y}}f \in V_{\mathbf{M}}^f$$

Fourier-Transformation

Die Menge $\mathcal{G}(\mathbf{M}) := \mathbf{M}\mathcal{P}(\mathbf{M}) = \mathbf{M}[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^d \cap \mathbb{Z}^d$ heißt *erzeugende Menge*.

Die Fourier-Matrix auf $\mathcal{P}(\mathbf{M})$:

$$\mathcal{F}(\mathbf{M}) := \frac{1}{\sqrt{m}} \left(e^{-2\pi i \mathbf{h}^T \mathbf{y}} \right)_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T), \mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} \in \mathbb{C}^{m \times m}$$

- $\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)$ adressiert Zeilen
- $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})$ die Spalten
- für $\mathcal{G}(\mathbf{M}^T), \mathcal{P}(\mathbf{M})$ je eine feste Anordnung der Elemente
- mit $\mathbf{a} = (a_{\mathbf{y}})_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} \in \mathbb{C}^m$ (sortiert wie die Spalten): DFT auf $\mathcal{P}(\mathbf{M})$

$$\hat{\mathbf{a}} = (\hat{a}_{\mathbf{h}})_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)} = \sqrt{m} \mathcal{F}(\mathbf{M}) \mathbf{a} \in \mathbb{C}^m$$

Fourier-Koeffizienten

- *Fourier-Koeffizienten* für $f \in L_2(\mathbb{T}^d)$

$$c_{\mathbf{k}}(f) := \langle f, e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{o}} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$$

⇒ Parsevalsche Gleichung:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x}) \overline{g(\mathbf{x})} d\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{k}}(f) \overline{c_{\mathbf{k}}(g)}$$

- Gramsche Matrix $\mathbf{G} = (\langle T_{\mathbf{x}} f, T_{\mathbf{y}} f \rangle)_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})}$ diagonalisierbar mit $\mathcal{F}(\mathbf{M})$

⇒ $T_{\mathbf{y}} f, \mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})$ linear unabhängig

$$\Leftrightarrow \forall \mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T) : \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} |c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z}}(f)|^2 > 0$$

Translationsinvarianz II

Charakterisierung der Translate in Fourier-Koeffizienten

Schreiben $g \in V_{\mathbf{M}}^f$ mit $c_{\mathbf{k}}(T_{\mathbf{y}}f) = e^{-2\pi i \mathbf{y}^T \mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}(f)$ als

$$g = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} a_{\mathbf{y}} T_{\mathbf{y}} f \Leftrightarrow c_{\mathbf{k}}(g) = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} a_{\mathbf{y}} e^{-2\pi i \mathbf{k}^T \mathbf{y}} c_{\mathbf{k}}(f), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$$

Zerlegen $\mathbf{k} = \mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z}$, $\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)$, $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$ ($e^{-2\pi i \mathbf{z}^T \mathbf{M} \mathbf{y}} = 1$)

$$\Leftrightarrow c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z}}(g) = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} a_{\mathbf{y}} e^{-2\pi i \mathbf{h}^T \mathbf{y}} c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z}}(f) = \hat{a}_{\mathbf{h}} c_{\mathbf{h} + \mathbf{M}^T \mathbf{z}}(f)$$

Schnelle Algorithmen I

Zurück zum Tensorprodukt

- *Smith-Normalform*: Zerlegung in ganzzahlige Matrizen $\mathbf{M} = \mathbf{QER}$ mit $|\det \mathbf{Q}| = |\det \mathbf{R}| = 1$ und $\mathbf{E} = \text{diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_d), \epsilon_{j-1} | \epsilon_j, j = 2, \dots, d$
 \Rightarrow Basiswechsel zu Tensorprodukt-Muster $\mathcal{P}(\mathbf{E})$

$$\mathcal{F}(\mathbf{M}) = \mathbf{P}_h \mathcal{F}_{\epsilon_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_{\epsilon_d} \mathbf{P}_y, \quad \mathcal{F}_{\epsilon} = \left(e^{-2\pi i h \epsilon^{-1} g} \right)_{g,h=0}^{\epsilon-1}$$

- \mathbf{P}_h und \mathbf{P}_y Umsortierung in $\mathcal{G}(\mathbf{M}^T)$ und $\mathcal{P}(\mathbf{M})$
 \Rightarrow Row-Column-Algorithmus

\Rightarrow Fourier-Transformation in $O(m \log m)$

Wavelet-Transformation

Gegeben seien

- Faktorisierung $\mathbf{M} = \mathbf{JN}$, $|\det \mathbf{J}| = 2$
- Skalierungsfunktionen $\xi, \varphi \in L_2(\mathbb{T}^d)$, $\varphi \in V_{\mathbf{M}}^{\xi}$ mit
- $T_{\mathbf{y}}\xi$, $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})$ linear unabhängig $\Rightarrow \dim V_{\mathbf{M}}^{\xi} = m$
- $T_{\mathbf{x}}\varphi$, $\mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$ linear unabhängig $\Rightarrow \dim V_{\mathbf{N}}^{\varphi} = \frac{m}{2}$

\Rightarrow Es existiert ein *Wavelet* ψ , so dass $V_{\mathbf{M}}^{\xi} = V_{\mathbf{N}}^{\varphi} \oplus V_{\mathbf{N}}^{\psi}$

\Rightarrow Zerlegung der Funktion $f_{\mathbf{M}} \in V_{\mathbf{M}}^{\xi}$ in $f_{\mathbf{M}} = f_{\mathbf{N}} + g_{\mathbf{N}}$, $f_{\mathbf{N}} \in V_{\mathbf{N}}^{\varphi}$, $g_{\mathbf{N}} \in V_{\mathbf{N}}^{\psi}$

- $f_{\mathbf{N}}$ ist eine „gröbere Darstellung“
- $g_{\mathbf{N}}$ heißt Wavelet-Anteil von $f_{\mathbf{M}} \Rightarrow$ Detail
- richtungsselektiv, abhängig von \mathbf{J}

Schnelle Algorithmen II

Beschreibung im Frequenzbereich

Zerlegung in Fourier- und V_M^ξ -Koeffizienten: Mit

$$f_M = \sum_{y \in \mathcal{P}(M)} a_{f_M, y} T_y \xi, \quad \varphi = \sum_{y \in \mathcal{P}(M)} a_{\varphi, y} T_y \xi$$

gilt für die gesuchte Funktion $f_N = \sum_{x \in \mathcal{P}(N)} a_{f_N, x} T_x \varphi$

$$\hat{a}_{f_N, k} = \frac{1}{\sqrt{|\det J|}} \sum_{g \in \mathcal{G}(J^T)} \overline{\hat{a}_{\varphi, k + N^T g}} \hat{a}_{f_M, k + N^T g}, \quad k \in \mathcal{G}(N^T)$$

analog mit $\psi \in V_M^\xi$ für $g_N \in V_N^\psi$

⇒ Wavelet-Transformation in $O(m)$

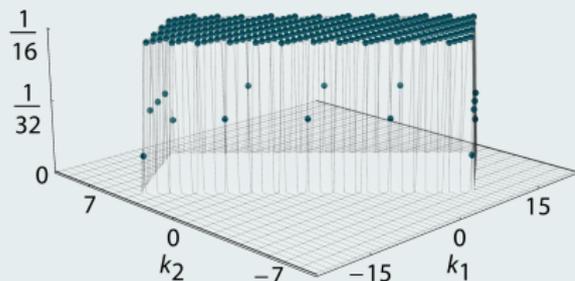
Konstruktion von Wavelet-Systemen

- $\mathcal{K}(\mathbf{M}^T) = \mathbf{M}^T[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d \cap \mathbb{Z}^d$
- Dirichlet-Skalierungsfunktion $c_{\mathbf{k}}(\varphi_{\mathbf{M}}) = \frac{1}{\sqrt{m}} \mathbf{1}_{\mathcal{K}(\mathbf{M}^T)}(\mathbf{k})$

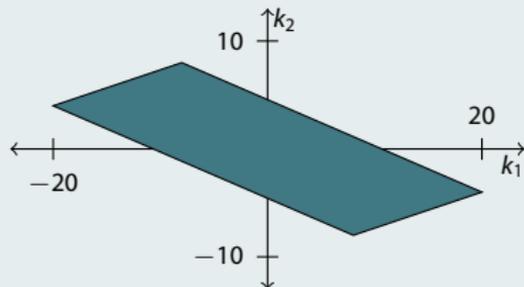
⇒ Gibbs-Phänomen

- Ränder gesondert betrachten für Orthonormalität

Für $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 28 & -12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{J} = \mathbf{J}_X \Rightarrow \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$



$c_{\mathbf{k}}(\varphi_{\mathbf{M}})$



schematisch

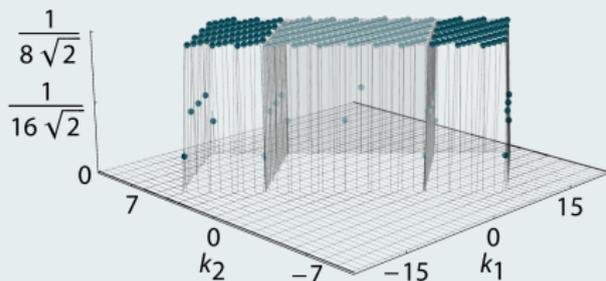
Konstruktion von Wavelet-Systemen

- $\mathcal{K}(\mathbf{M}^T) = \mathbf{M}^T[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d \cap \mathbb{Z}^d$
- Dirichlet-Skalierungsfunktion $c_{\mathbf{k}}(\varphi_{\mathbf{M}}) = \frac{1}{\sqrt{m}} \mathbf{1}_{\mathcal{K}(\mathbf{M}^T)}(\mathbf{k})$

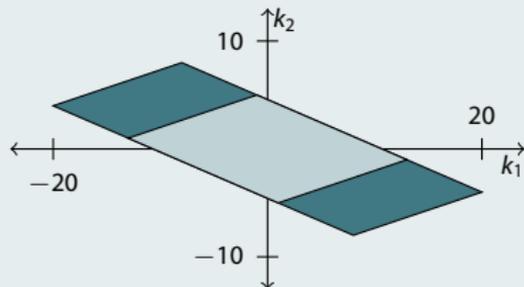
⇒ Gibbs-Phänomen

- Ränder gesondert betrachten für Orthonormalität

Für $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 28 & -12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{J} = \mathbf{J}_X \Rightarrow \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$



$c_{\mathbf{k}}(\varphi_{\mathbf{N}}), |c_{\mathbf{k}}(\psi_{\mathbf{N}})|$



schematisch

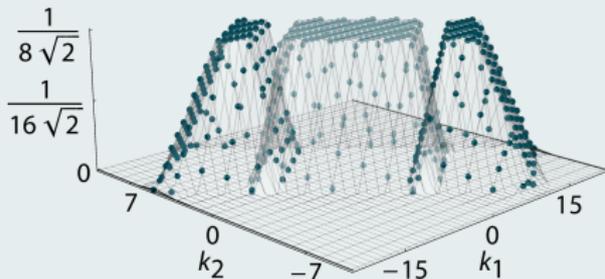
Konstruktion von Wavelet-Systemen

- $\mathcal{K}(\mathbf{M}^T) = \mathbf{M}^T[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d \cap \mathbb{Z}^d$
- *de la Vallée Poussin-Mittel* $c_{\mathbf{k}}(\tilde{\varphi}_{\mathbf{M}})$

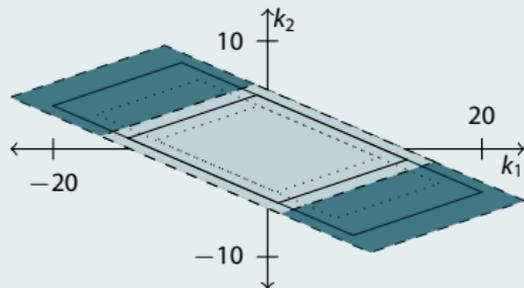
⇒ Lokalisierung

- Glattheit auch am Rand

Für $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 28 & -12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{J} = \mathbf{J}_X \Rightarrow \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$



$c_{\mathbf{k}}(\tilde{\varphi}_{\mathbf{N}}), |c_{\mathbf{k}}(\tilde{\psi}_{\mathbf{N}})|$



schematisch

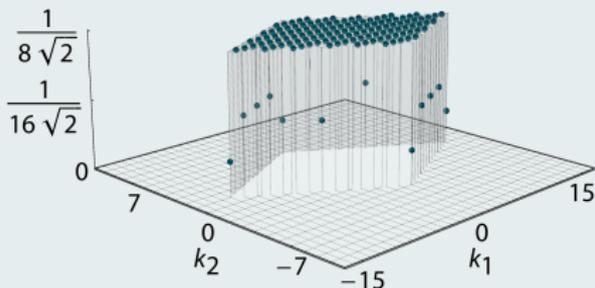
Konstruktion von Wavelet-Systemen

- $\mathcal{K}(\mathbf{M}^T) = \mathbf{M}^T[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d \cap \mathbb{Z}^d$
- Dirichlet-Skalierungsfunktion $c_{\mathbf{k}}(\varphi_{\mathbf{M}}) = \frac{1}{\sqrt{m}} \mathbf{1}_{\mathcal{K}(\mathbf{M}^T)}(\mathbf{k})$

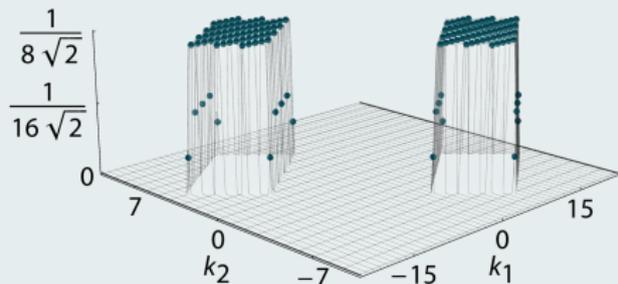
⇒ Gibbs-Phänomen

- Ränder gesondert betrachten für Orthonormalität

Für $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 28 & -12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{J} = \mathbf{J}_X \Rightarrow \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$



$c_{\mathbf{k}}(\varphi_{\mathbf{N}})$



$c_{\mathbf{k}}(\psi_{\mathbf{N}}) \times e^{2\pi i \mathbf{k}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{g}}, \mathbf{g} \in \mathcal{P}(\mathbf{J}) \setminus \{\mathbf{0}\}$

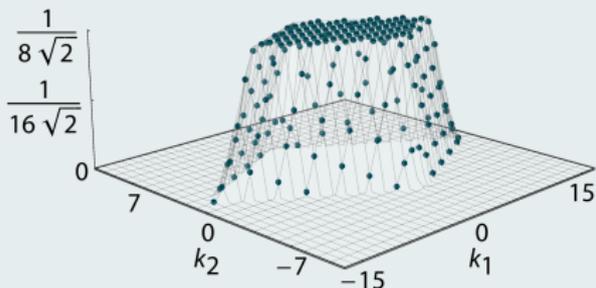
Konstruktion von Wavelet-Systemen

- $\mathcal{K}(\mathbf{M}^T) = \mathbf{M}^T[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d \cap \mathbb{Z}^d$
- *de la Vallée Poussin-Mittel* $c_{\mathbf{k}}(\tilde{\varphi}_{\mathbf{M}})$

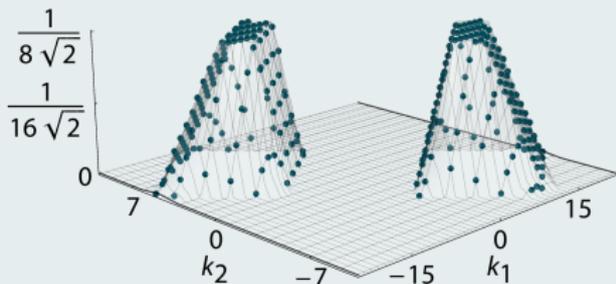
⇒ Lokalisierung

- Glattheit auch am Rand

Für $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 28 & -12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{J} = \mathbf{J}_X \Rightarrow \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$



$c_{\mathbf{k}}(\tilde{\varphi}_{\mathbf{N}})$



$c_{\mathbf{k}}(\tilde{\psi}_{\mathbf{N}}) \times e^{2\pi i \mathbf{k}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{g}}, \mathbf{g} \in \mathcal{P}(\mathbf{J}) \setminus \{\mathbf{0}\}$

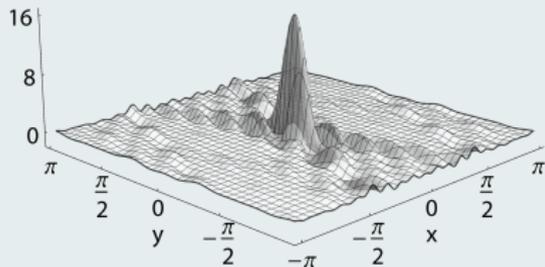
Konstruktion von Wavelet-Systemen

- $\mathcal{K}(\mathbf{M}^T) = \mathbf{M}^T[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d \cap \mathbb{Z}^d$
- Dirichlet-Skalierungsfunktion $\varphi_{\mathbf{M}}$

⇒ Gibbs-Phänomen

- im Zeitbereich: Richtungspräferenz

Für $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 28 & -12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{J} = \mathbf{J}_X \Rightarrow \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$



$\varphi_{\mathbf{M}}$

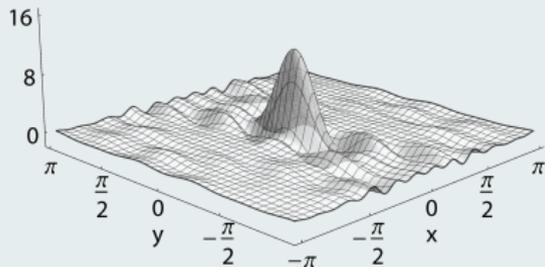
Konstruktion von Wavelet-Systemen

- $\mathcal{K}(\mathbf{M}^T) = \mathbf{M}^T[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d \cap \mathbb{Z}^d$
- Dirichlet-Skalierungsfunktion $\varphi_{\mathbf{M}}$

⇒ Gibbs-Phänomen

- im Zeitbereich: Richtungspräferenz

Für $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 28 & -12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{J} = \mathbf{J}_X \Rightarrow \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$



$\varphi_{\mathbf{N}}$

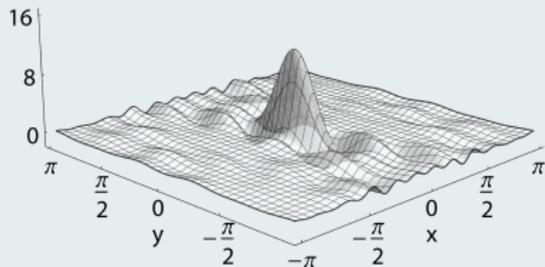
Konstruktion von Wavelet-Systemen

- $\mathcal{K}(\mathbf{M}^T) = \mathbf{M}^T[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d \cap \mathbb{Z}^d$
- Dirichlet-Skalierungsfunktion $\varphi_{\mathbf{M}}$

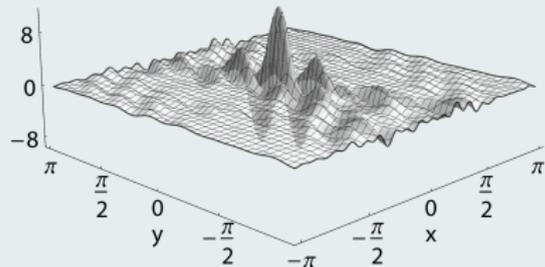
⇒ Gibbs-Phänomen

- im Zeitbereich: Richtungspräferenz

Für $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 28 & -12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{J} = \mathbf{J}_X \Rightarrow \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$



$\varphi_{\mathbf{N}}$



$\psi_{\mathbf{N}}$

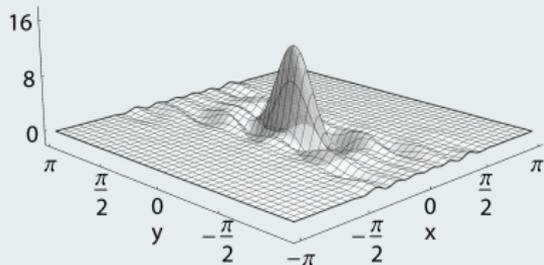
Konstruktion von Wavelet-Systemen

- $\mathcal{K}(\mathbf{M}^T) = \mathbf{M}^T[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d \cap \mathbb{Z}^d$
- *de la Vallée Poussin-Mittel* $\tilde{\varphi}_{\mathbf{M}}$

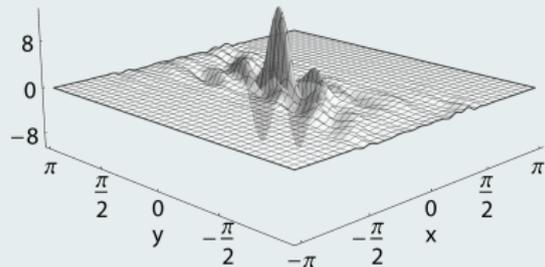
⇒ Lokalisierung

- im Zeitbereich: Richtungspräferenz

Für $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 28 & -12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{J} = \mathbf{J}_X \Rightarrow \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$

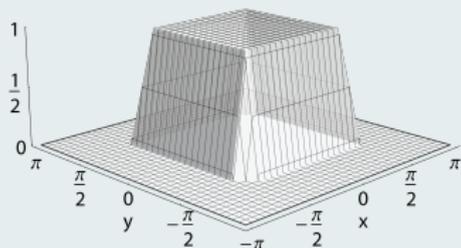


$\tilde{\varphi}_{\mathbf{N}}$



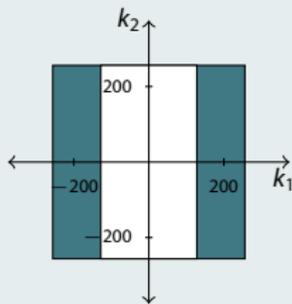
$\tilde{\psi}_{\mathbf{N}}$

Beispiel: Zerlegung und Richtungen

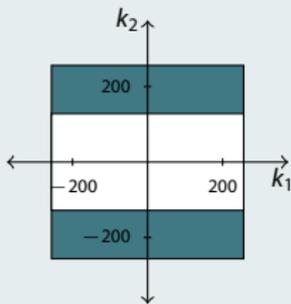


$B_{\Xi}(\mathbf{x})$

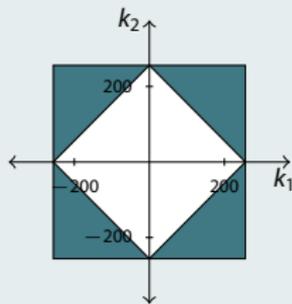
- Box Spline B_{Ξ} , $\Xi = \frac{\pi}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}$
- Samplingpunkte:
 $2\pi\mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})$, $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 512 & 0 \\ 0 & 512 \end{pmatrix}$
- Dirichlet-Wavelets
- 3 Zerlegungsmöglichkeiten:



\mathbf{J}_X

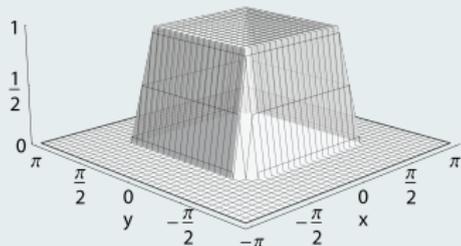


\mathbf{J}_Y

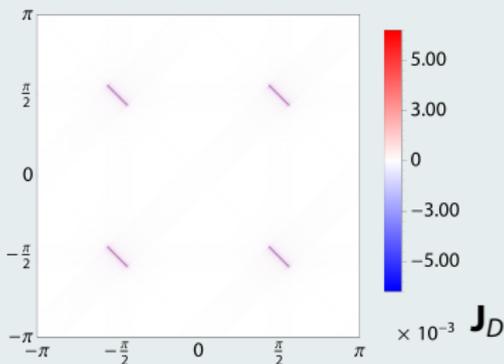
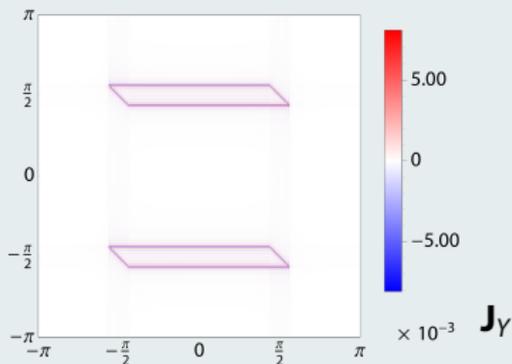
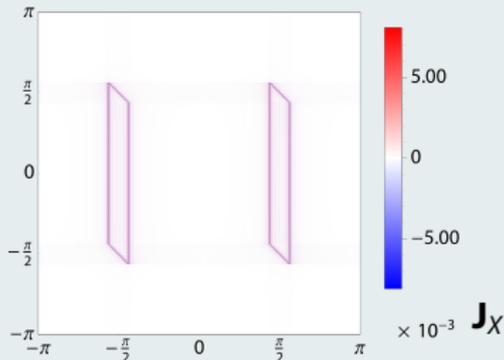


\mathbf{J}_D

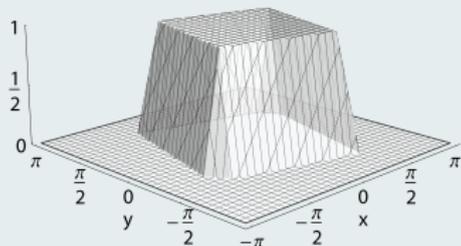
Beispiel: Zerlegung und Richtungen



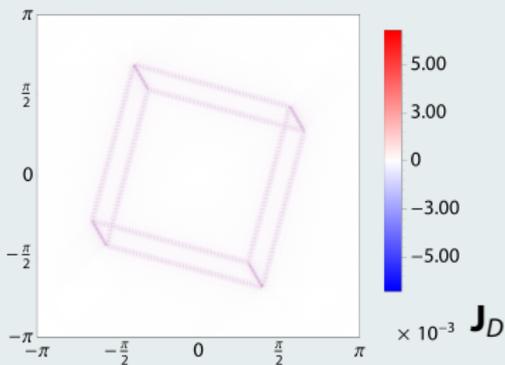
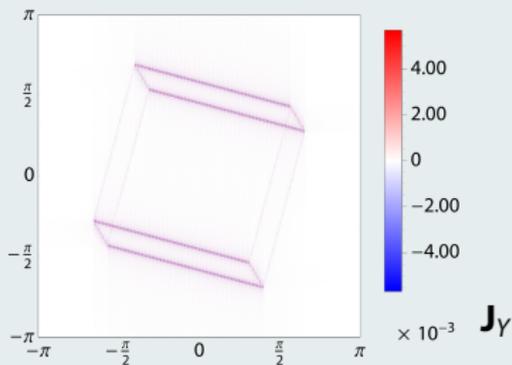
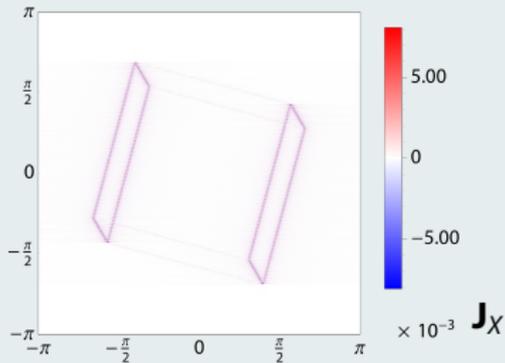
$$B_{\equiv}(\mathbf{x})$$



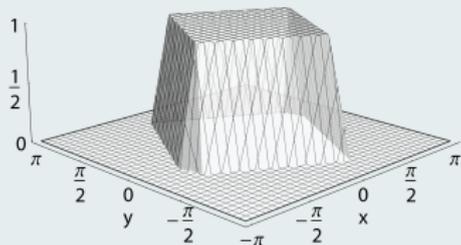
Beispiel: Zerlegung und Richtungen



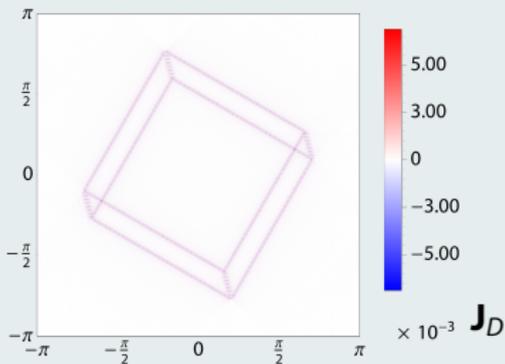
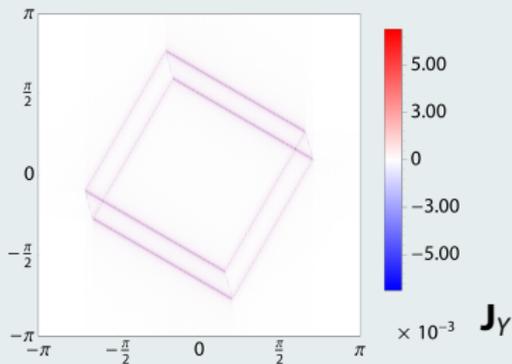
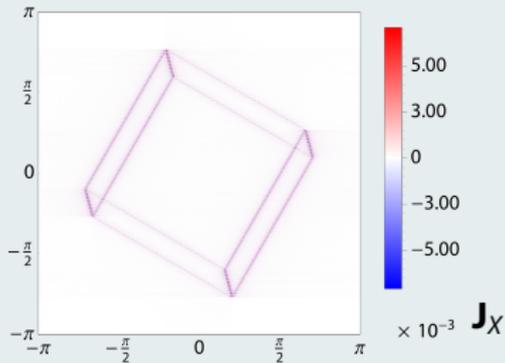
$$B \equiv \left(\mathbf{R} \frac{\pi}{12} \mathbf{x} \right)$$



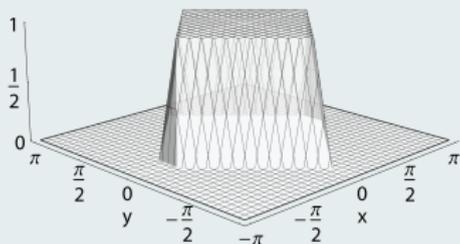
Beispiel: Zerlegung und Richtungen



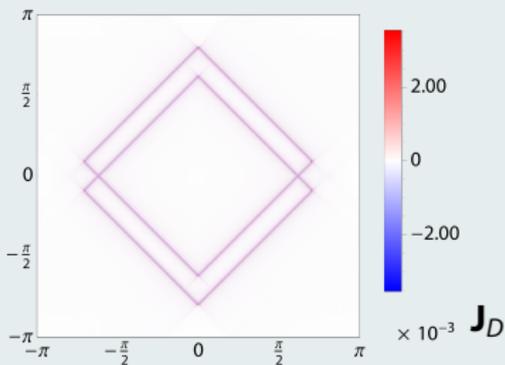
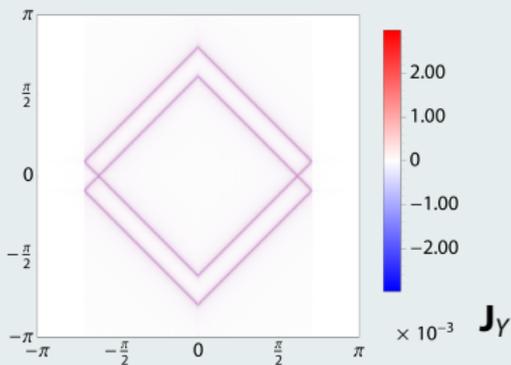
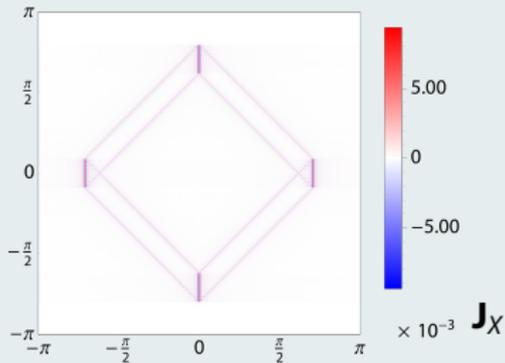
$$B \equiv (\mathbf{R} \frac{\pi}{6} \mathbf{x})$$



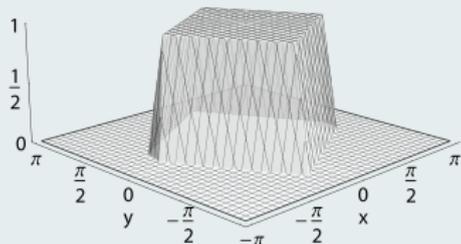
Beispiel: Zerlegung und Richtungen



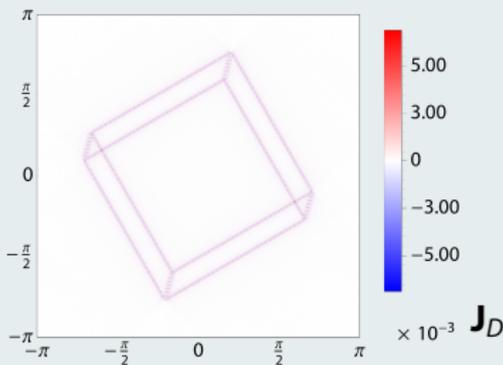
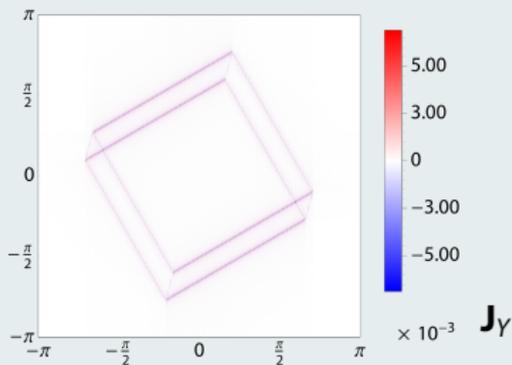
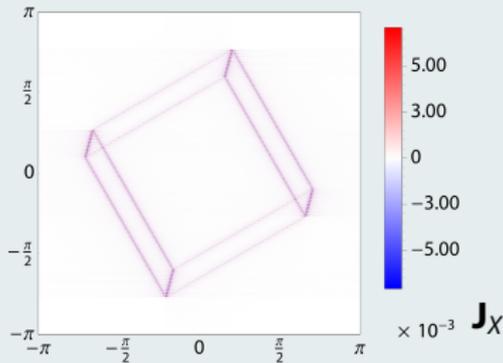
$$B \equiv \left(\mathbf{R} \frac{\pi}{4} \mathbf{x} \right)$$



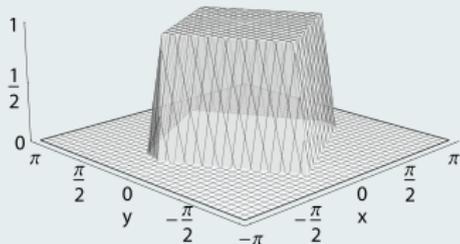
Beispiel: Zerlegung und Richtungen



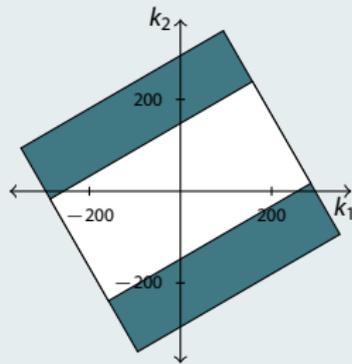
$$B \equiv (\mathbf{R} \frac{\pi}{3} \mathbf{x})$$



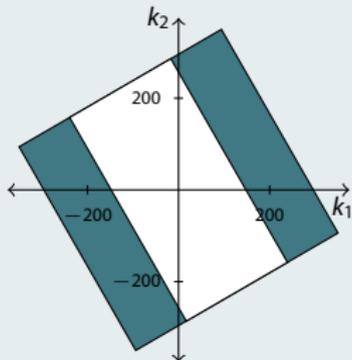
Beispiel: Zerlegung und Richtungen



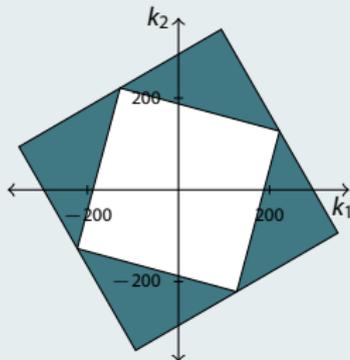
$$B \equiv (\mathbf{R} \frac{\pi}{3} \mathbf{x}), \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 256 & -444 \\ 444 & 256 \end{pmatrix}$$



\mathbf{J}_X

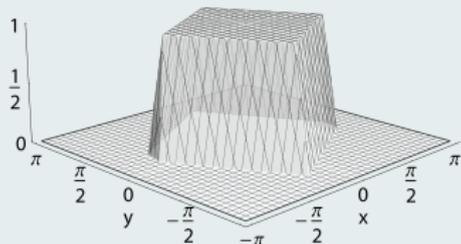


\mathbf{J}_Y

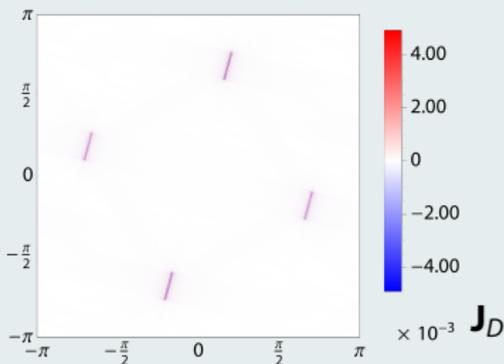
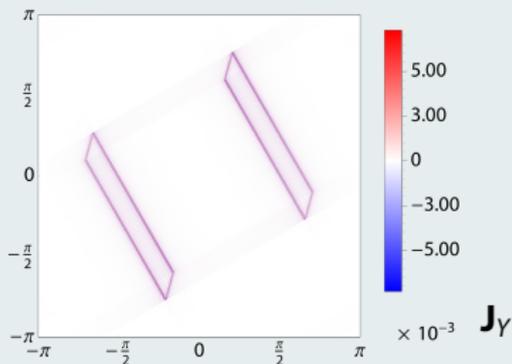
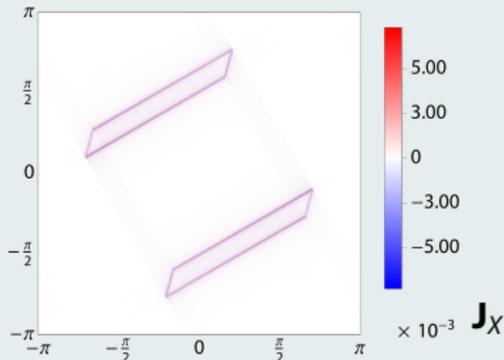


\mathbf{J}_D

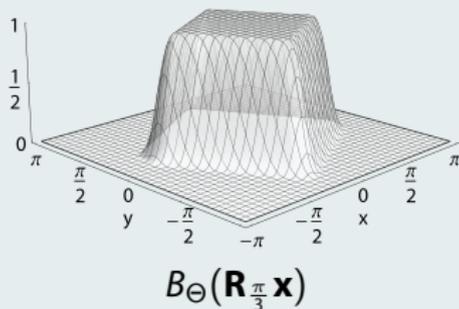
Beispiel: Zerlegung und Richtungen



$$B \equiv \left(\mathbf{R} \frac{\pi}{3} \mathbf{x} \right), \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 256 & -444 \\ 444 & 256 \end{pmatrix}$$

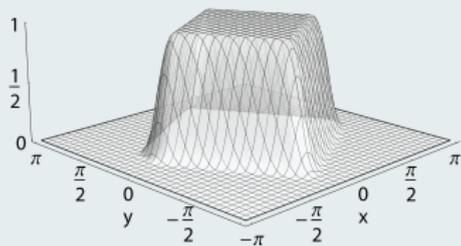


Beispiel: Zerlegung und Lokalität

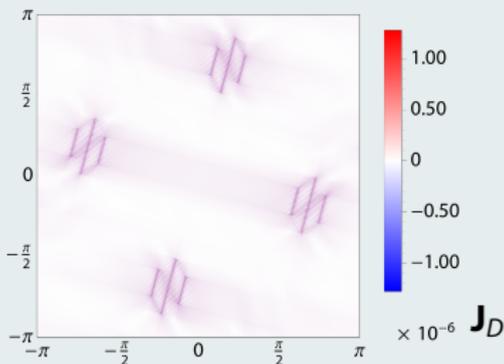
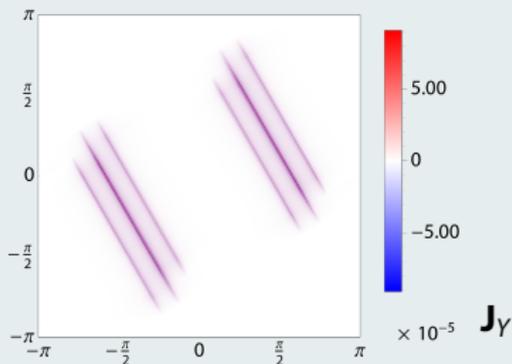
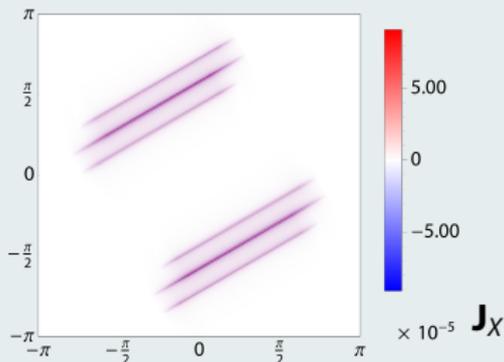


- Box Spline B_{Θ} , $\Theta = \frac{\pi}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- um $\frac{\pi}{3}$ gedreht
- Samplingpunkte: $2\pi\mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}_2)$,
 $\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 256 & -444 \\ 444 & 256 \end{pmatrix}$
- gleiche Zerlegung wie im letzten Beispiel

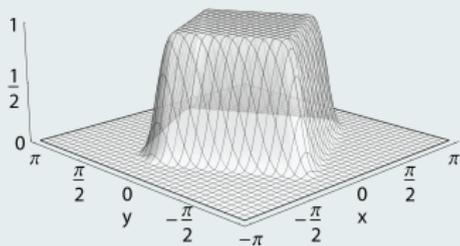
Beispiel: Zerlegung und Lokalität



$B_{\Theta}(\mathbf{R} \frac{\pi}{3} \mathbf{x})$
Dirichlet-Wavelets

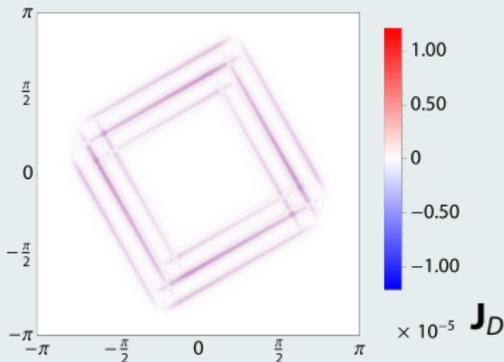
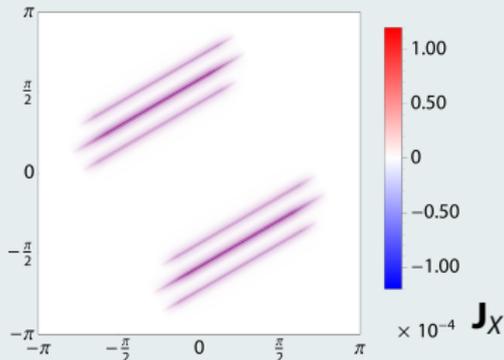
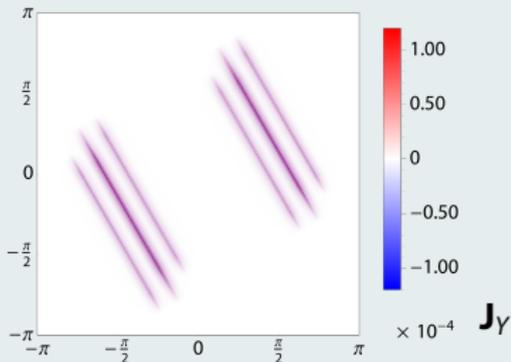


Beispiel: Zerlegung und Lokalität

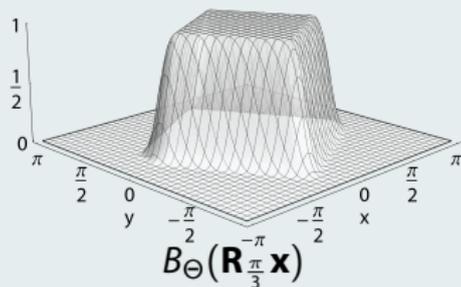


$$B_{\Theta}\left(\mathbf{R}\frac{\pi}{3}\mathbf{x}\right)$$

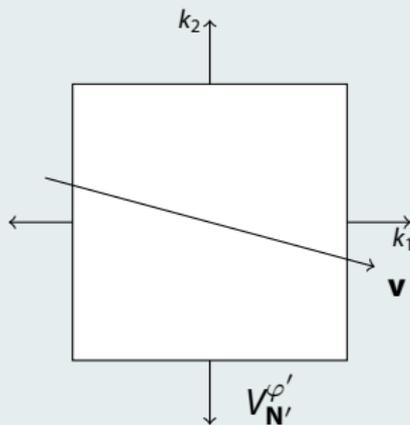
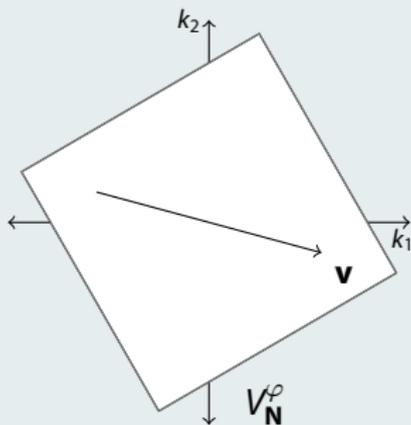
de la Vallée Poussin-Wavelets



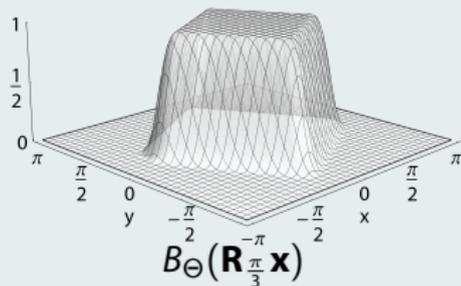
Beispiel: Zerlegung über mehrere Level



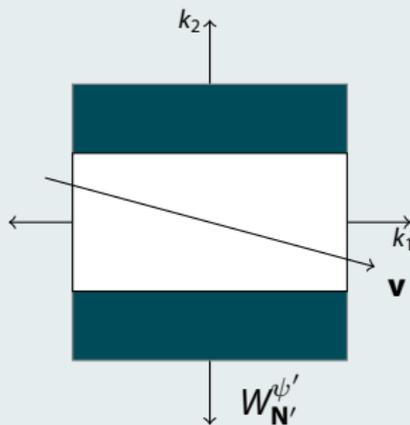
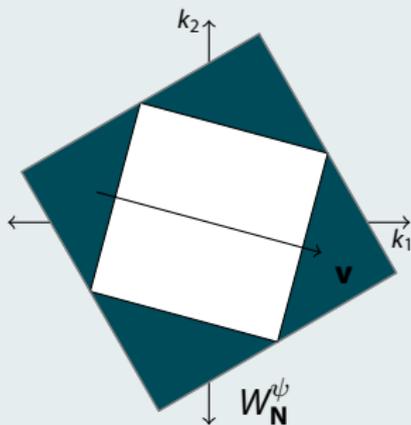
- Box Spline B_{Θ} , $\Theta = \frac{\pi}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- um $\frac{\pi}{3}$ gedreht
- $\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 254 & -444 \\ 446 & 260 \end{pmatrix}$, $\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 512 & 0 \\ 0 & 512 \end{pmatrix}$
- Zerlegung: $\mathbf{M}_3 = \mathbf{N}$
bzw. $\mathbf{M}_1 = \mathbf{N}'$



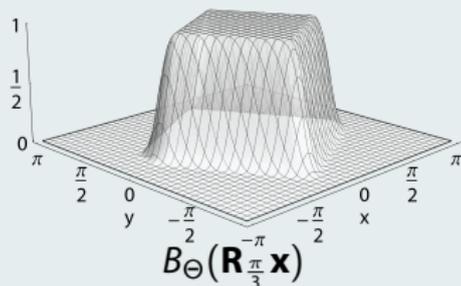
Beispiel: Zerlegung über mehrere Level



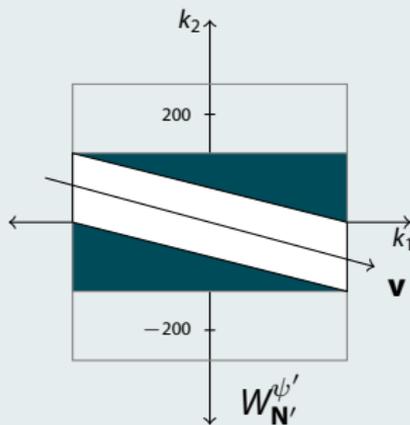
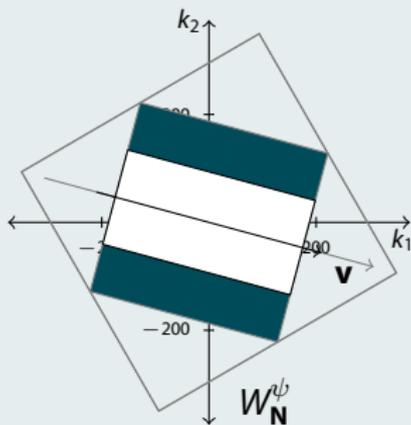
- Box Spline B_{Θ} , $\Theta = \frac{\pi}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- um $\frac{\pi}{3}$ gedreht
- $\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 254 & -444 \\ 446 & 260 \end{pmatrix}$, $\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 512 & 0 \\ 0 & 512 \end{pmatrix}$
- Zerlegung: $\mathbf{M}_3 = \mathbf{J}_D \mathbf{N}$
bzw. $\mathbf{M}_1 = \mathbf{J}_Y \mathbf{N}'$



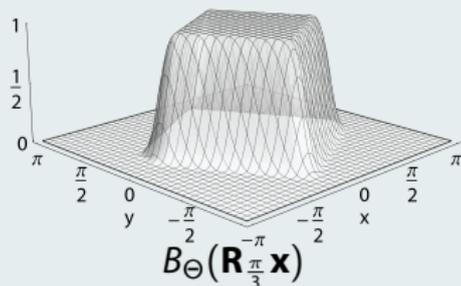
Beispiel: Zerlegung über mehrere Level



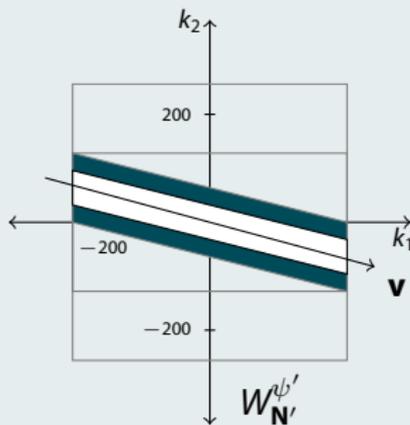
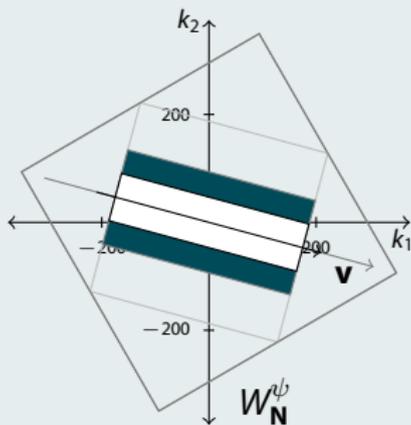
- Box Spline B_{Θ} , $\Theta = \frac{\pi}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- um $\frac{\pi}{3}$ gedreht
- $\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 254 & -444 \\ 446 & 260 \end{pmatrix}$, $\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 512 & 0 \\ 0 & 512 \end{pmatrix}$
- Zerlegung: $\mathbf{M}_3 = \mathbf{J}_D \mathbf{J}_Y \mathbf{N}$
bzw. $\mathbf{M}_1 = \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y^+ \mathbf{N}'$



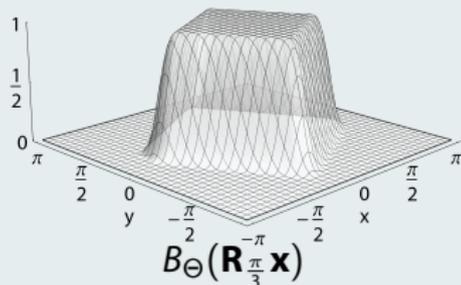
Beispiel: Zerlegung über mehrere Level



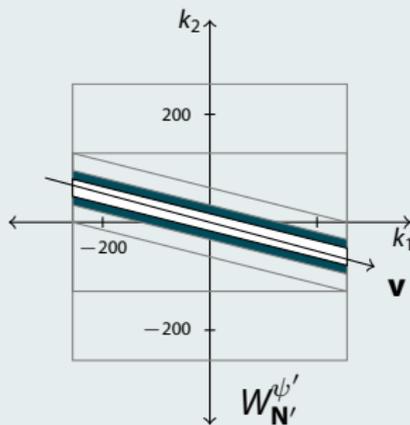
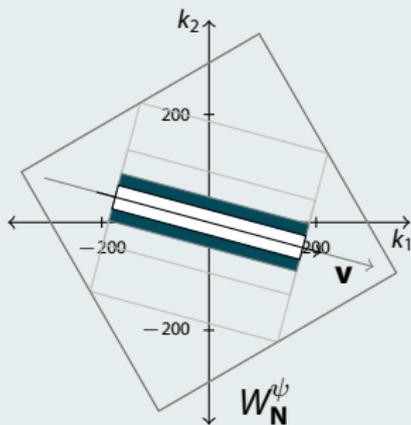
- Box Spline B_{Θ} , $\Theta = \frac{\pi}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- um $\frac{\pi}{3}$ gedreht
- $\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 254 & -444 \\ 446 & 260 \end{pmatrix}$, $\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 512 & 0 \\ 0 & 512 \end{pmatrix}$
- Zerlegung: $\mathbf{M}_3 = \mathbf{J}_D \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y \mathbf{N}$
bzw. $\mathbf{M}_1 = \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y^+ \mathbf{J}_Y \mathbf{N}'$



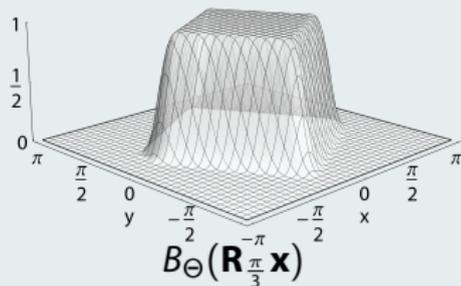
Beispiel: Zerlegung über mehrere Level



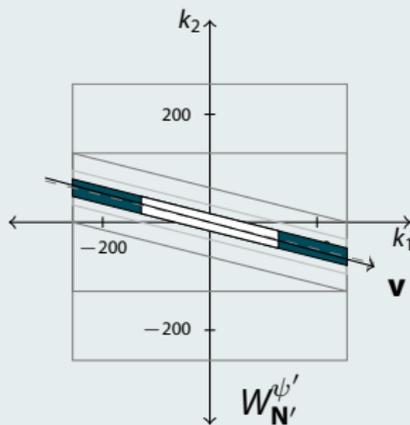
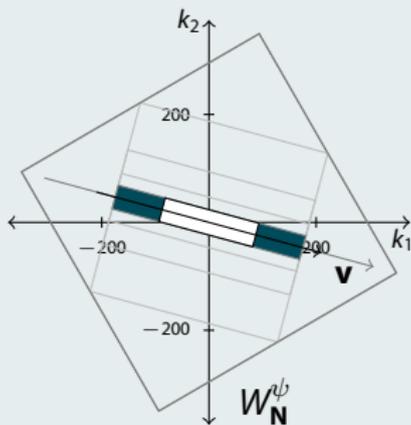
- Box Spline B_{Θ} , $\Theta = \frac{\pi}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- um $\frac{\pi}{3}$ gedreht
- $\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 254 & -444 \\ 446 & 260 \end{pmatrix}$, $\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 512 & 0 \\ 0 & 512 \end{pmatrix}$
- Zerlegung: $\mathbf{M}_3 = \mathbf{J}_D \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y \mathbf{N}$
bzw. $\mathbf{M}_1 = \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y^+ \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y \mathbf{N}'$



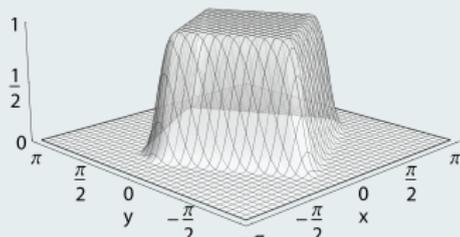
Beispiel: Zerlegung über mehrere Level



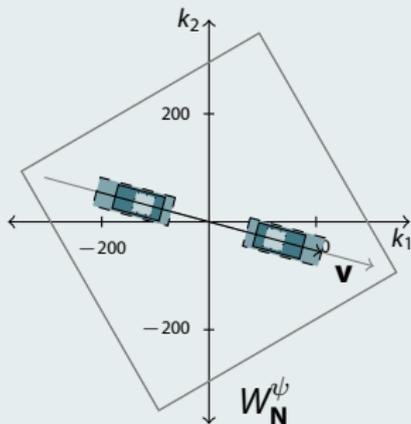
- Box Spline B_Θ , $\Theta = \frac{\pi}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- um $\frac{\pi}{3}$ gedreht
- $\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 254 & -444 \\ 446 & 260 \end{pmatrix}$, $\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 512 & 0 \\ 0 & 512 \end{pmatrix}$
- Zerlegung: $\mathbf{M}_3 = \mathbf{J}_D \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_X \mathbf{N}$
bzw. $\mathbf{M}_1 = \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y^+ \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_X \mathbf{N}'$



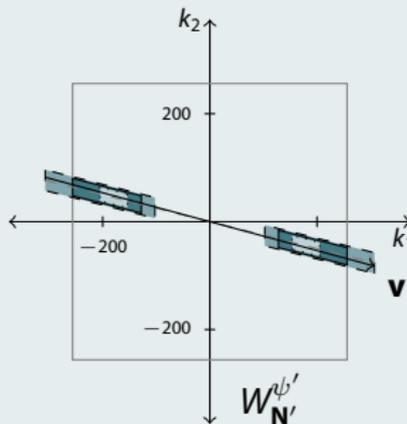
Beispiel: Zerlegung über mehrere Level



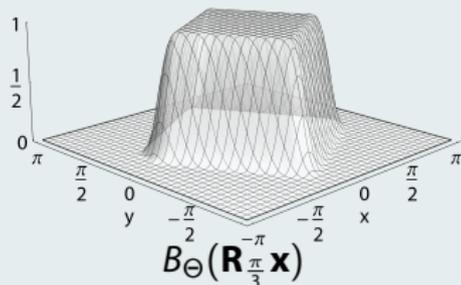
$B_{\Theta}(\mathbf{R} \frac{\pi}{3} \mathbf{x})$
de la Vallée Poussin



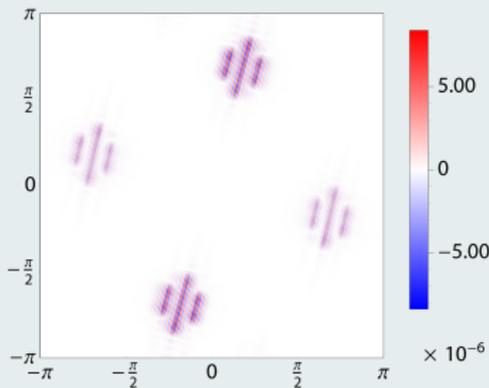
- Box Spline B_{Θ} , $\Theta = \frac{\pi}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- um $\frac{\pi}{3}$ gedreht
- $\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 254 & -444 \\ 446 & 260 \end{pmatrix}$, $\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 512 & 0 \\ 0 & 512 \end{pmatrix}$
- Zerlegung: $\mathbf{M}_3 = \mathbf{J}_D \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_X \mathbf{N}$
bzw. $\mathbf{M}_1 = \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y^+ \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_X \mathbf{N}'$



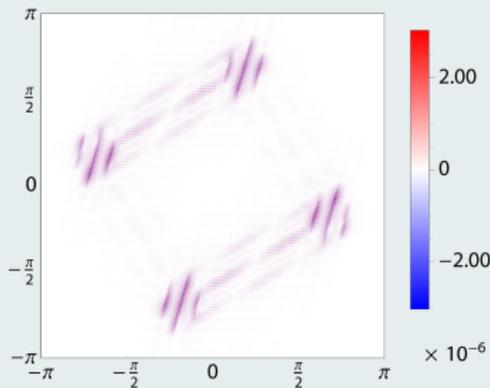
Beispiel: Zerlegung über mehrere Level



de la Vallée Poussin



- Box Spline B_{Θ} , $\Theta = \frac{\pi}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- um $\frac{\pi}{3}$ gedreht
- $\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 254 & -444 \\ 446 & 260 \end{pmatrix}$, $\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 512 & 0 \\ 0 & 512 \end{pmatrix}$
- Zerlegung: $\mathbf{M}_3 = \mathbf{J}_D \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_X \mathbf{N}$
bzw. $\mathbf{M}_1 = \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y^+ \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_Y \mathbf{J}_X \mathbf{N}'$



Zusammenfassung

- Muster $\mathcal{P}(\mathbf{M})$ verallgemeinern äquidistante Punkte
- auf $\mathcal{P}(\mathbf{M})$: FFT & schnelle Wavelet-Transformation
- Vergleich der Dirichlet- und de la Vallée Poussin-artige Wavelets
- Richtungspräferenz bei der Kantendetektion
- Mit den de la Vallée Poussin-Wavelets
 - gute Lokalisationseigenschaften
 - Scherungsmatrizen möglich, etwa $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Literatur

- [Be13] rb, *The fast Fourier Transform and fast Wavelet Transform for Patterns on the Torus*, erscheint im ACHA (2013).
- [LP10] D. Langemann, J. Prestin, *Multivariate periodic wavelet analysis*, ACHA 28 (2010), p. 46–66.
- [MS03] I. E. Maximenko, M. A. Skopina, *Multivariate periodic wavelets*, St. Petersburg. Math. J. 15 (2003), p. 165–190.
- [PT95] G. Plonka, M. Tasche, *On the computation of periodic spline wavelets*, ACHA 2 (1995), p. 1–14.
- [Se95] K. Selig, *periodische Wavelet-Packets und eine gradoptimale Schauderbasis*, Dissertation, Universität Rostock, 1998.

Literatur

- [Be13] rb, *The fast Fourier Transform and fast Wavelet Transform for Patterns on the Torus*, erscheint im ACHA (2013).
- [LP10] D. Langemann, J. Prestin, *Multivariate periodic wavelet analysis*, ACHA 28 (2010), p. 46–66.
- [MS03] I. E. Maximenko, M. A. Skopina, *Multivariate periodic wavelets*, St. Petersburg. Math. J. 15 (2003), p. 165–190.
- [PT95] G. Plonka, M. Tasche, *On the computation of periodic spline wavelets*, ACHA 2 (1995), p. 1–14.
- [Se95] K. Selig, *periodische Wavelet-Packets und eine gradoptimale Schauderbasis*, Dissertation, Universität Rostock, 1998.

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit.